**Лекция 1 [ Понятие решения. Множество решений, оптимальное решение. Показатель эффективности решения. Математические модели, принципы их построения, виды моделей. Задачи: классификация, методы решения, граничные условия. ]**

**Введение в математическое моделирование**

Исследование операций — это прикладное направление кибернетики, изучающее способы совершенствования и повышения эффективности организации, планирования и управления в различных системах на основе количественных методов.

Наибольшее распространение находят многовариантные и оптимизационные расчеты. В настоящее время постепенно переходят от многовариантных расчетов к оптимизационным, которые имеют большие преимущества перед многовариантными.

Задача оптимизации в общем случае включает три составляющие: целевую функцию (критерий оптимизации), ограничения, граничные условия.

Критерий оптимизации показывает влияние искомых переменных на его величину, которая должна быть минимизирована или максимизирована в зависимости от выбранного критерия.

Ограничения определяют существующие связи между искомыми переменными. По своему происхождению связи могут быть детерминированными и статистическими.

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных.

Значения искомых переменных, удовлетворяющих граничным условиям и ограничениям, называют допустимым решением задачи.

В многовариантных расчетах задаются конкретные значения некоторых искомых величин. В оптимизационных же задаются не значения, а граничные условия, то есть предельно допустимые значения всех искомых величин. В многовариантных расчетах значение целевой функции является следствием заданных значений величин. В оптимизационных же находятся такие значения искомых величин, которые, во-первых, удовлетворяют всем ограничениям и граничным условиям, а во-вторых, придают целевой функции оптимальное, то есть максимальное или минимальное значение.

**Основные понятия: решение, множество возможных решений, оптимальное решение, показатель эффективности**

Операцией называется всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров называется решением. Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными.

Оптимальными называются решения, по тем или другим признакам предпочтительные перед другими.

Процесс поиска (выбора) решения носит циклический характер, т.е. любой из входящих в него этапов может повторяться неоднократно до тех пор, пока не будет найдено решение, удовлетворяющее требованиям Лица Принимающего Решения. При этом могут уточняться цели и условия проведения операции.

Иногда в результате исследования удается указать одно-единственное строго оптимальное решение, чаще — выделить область практически равноценных оптимальных (разумных) решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор.

Параметры, совокупность которых образует решение, называются элементами решения. В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки и т. д. Например, если составляется план перевозок однородных грузов из пунктов отправления А1, А2, .... Am в пункты назначения В1, В2, ..., Вn, то элементами решения будут числа xij, показывающие, какое количество груза будет отправлено из i-го пункта отправления Ai в j-й пункт назначения Bj. Совокупность чисел xij образует решение.

Совокупность элементов решения будем обозначать одной буквой х и говорить «решение х».

Кроме элементов решения в любой задаче исследования операций имеются еще заданные условия, которые фиксированы с самого начала и нарушены быть не могут (например, грузоподъемность машины; размер планового задания; весовые характеристики оборудования и т. п.). В своей совокупности они формируют так называемое «множество возможных решений».

Обозначим это множество буквой X. Запишем в виде формулы, что решение х принадлежит этому множеству: х ∈ X (читается: элемент х входит в множество X).

Во множестве возможных решений Х необходимо выделить те решения х (одно или область решений), которые с той или другой точки зрения эффективнее других. Для сравнения между собой по эффективности разных решений существует количественный критерий - показатель эффективности W («целевая функция»). Этот показатель выбирается так, чтобы он отражал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели.

Если показатель эффективности желательно максимизировать, то будем записывать в виде W => max, а если минимизировать — W => min.

**Математические модели, основные принципы построения моделей**

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется какая-то математическая модель.

Математическая модель представляет собой формализованное описание операции с помощью некоторого абстрактного языка, например в виде совокупности математических соотношений, или схемы алгоритма. Любое математическое выражение, в котором фигурируют физические величины, можно рассматривать как математическую модель того или иного процесса или явления.

При построении модели реальное явление упрощается, схематизируется, и эта схема («макет» явления) описывается с помощью того или другого математического аппарата.

В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования, какие параметры требуется определить и влияние каких факторов отразить. Необходимо также в каждом конкретном случае соразмерять точность и подробность модели:

а) с той точностью, с которой нам нужно знать решение;

б) с той информацией, которой мы располагаем или можем приобрести.

Математическая модель должна отражать важнейшие черты явления, все существенные факторы, от которых зависит успех операции.

Характерным для исследования операций является также повторное обращение к модели (после того, как первый тур расчетов уже проведен) для внесения в модель коррективов.

При построении математической модели может быть использован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях явление описывается простыми, алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть явление в динамике, применяются дифференциальные уравнения. В наиболее сложных случаях, когда развитие операции и ее исход зависят от большого числа сложно переплетающихся между собой случайных факторов, применяется метод статистического моделирования (Монте-Карло). Идею этого метода можно описать так: процесс развития операции, со всеми сопровождающими его случайностями, как бы «копируется», воспроизводится на машине (ЭВМ). В результате получается один экземпляр («реализация») случайного процесса развития операции со случайным ходом и исходом. Сама по себе одна такая реализация не дает оснований к выбору решения, но, получив множество таких реализаций и обработав их, находим средние характеристики процесса и получаем представление о том, как в среднем влияют на них условия задачи и элементы решения.

В исследовании операций применяются как аналитические, так и статистические модели. Аналитические модели более грубы, учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений. Зато результаты расчета по ним легче обозримы, отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. Аналитические модели больше приспособлены для поиска оптимальных решений.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое число факторов. Но и у них — свои недостатки: громоздкость, плохая обозримость, большой расход машинного времени, а главное, крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать путем догадок и проб.

Наилучшие работы в области исследования операций основаны на совместном применении аналитических и статистических моделей. Аналитическая модель дает возможность в общих чертах разобраться, в явлении, наметить как бы «контур» основных закономерностей. Любые уточнения могут быть получены с помощью статистических моделей.

Имитационное моделирование применяется к процессам, в ход которых может время от времени вмешиваться человеческая воля. Человек (или группа людей), руководящий операцией, может, в зависимости от сложившейся обстановки, принимать те или другие решения. Затем приводится в действие математическая модель, которая показывает, какое ожидается изменение обстановки в ответ на это решение и к каким последствиям оно приведет спустя некоторое время. Следующее «текущее решение» принимается уже с учетом реальной новой обстановки и т. д. В результате многократного повторения такой процедуры руководитель постепенно «учится» принимать правильные решения — если не оптимальные, то почти оптимальные. Такие процедуры известны под названием «деловых игр».

**Прямые и обратные задачи. Детерминированные задачи и задачи в условиях неопределенности**

Задачи исследования операций делятся на две категории: прямые и обратные. Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях мы примем какое-то решение х∈X? В частности, чему будет равен, при данном решении х, выбранный показатель эффективности W?

Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение х для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум?

Если число возможных вариантов решения, образующих множество X, мало, то можно вычислить величину W для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых W достигает максимума. Такой способ нахождения оптимального решения называется «простым перебором».

Запишем постановку задачи оптимизации решения (обратной задачи исследования операций) в общей форме:

Пусть имеется некоторая операция О, на успех которой мы можем в какой-то мере влиять, выбирая тем или другим способом решение х. Пусть эффективность операции характеризуется одним показателем W=> max.

Возьмем самый простой, так называемый «детерминированный» случай, когда все условия операции полностью известны заранее, т. е. не содержат неопределенности. Тогда все факторы, от которых зависит успех операции, делятся на две группы:

1) заданные, заранее известные факторы (условия выполнения операции), которые обозначим буквой α;

2) зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение х.

Первая группа факторов содержит ограничения, налагаемые на решение, т. е. определяет область возможных решений X.

Показатель эффективности W зависит от обеих групп факторов. Запишем это в виде формулы:

W=W (α,x) (3.1)

В числе заданных условий α обычно присутствуют ограничения, налагаемые на элементы решения, имеющие вид равенств или неравенств.

Будем считать, что вид зависимости (3.1) нам известен, т. е. прямая задача решена. Тогда обратная задача формулируется следующим образом.

При заданном комплексе условий α найти такое решение х=х\*, которое обращает показатель эффективности W в максимум.

Этот максимум обозначим:

W\* = max {W (α, х)}. (3.2)

Формула (3.2) читается так: W\* есть максимальное значение W(∝,х), взятое по всем решениям, входящим в множество возможных решений X.

Метод поиска экстремума и связанного с ним оптимального решения х\* должен всегда выбираться исходя из особенностей функции W и вида ограничений, накладываемых на решение. Например, если функция W линейно зависит от элементов решения х1, х2, ..., а ограничения, налагаемые на х1, х2, ..., имеют вид линейных равенств или неравенств, возникает классическая задача линейного программирования.

Для оптимизации управления многоэтапными операциями применяется метод динамического программирования.

Рассмотрим обратную задачу исследования операций когда показатель эффективности W зависит не только от двух групп факторов: заданных, заранее известных ∝ и элементов решения х, но и от еще одной — неизвестных факторов, которые в совокупности обозначим буквой ξ.

Запишем зависимость показателя эффективности W от всех трех групп факторов:

W=W(α, х, ξ). (3.3)

Так как величина W зависит от неизвестных факторов ξ, то даже при заданных α и x она уже не может быть вычислена, т.е. остается неопределенной. Задача поиска оптимального решения тоже теряет определенность. Следовательно, при заданных условиях α, с учетом неизвестных факторов ξ, требуется найти такое решение х∈X, которое, по возможности, обеспечивает максимальное значение показателя эффективности W.

Наличие неопределенных факторов ξ характерно для задачи о выборе решения в условиях неопределенности.

Типичной для крупномасштабной задачи исследования операций является многокритериальность — наличие ряда количественных показателей W1, W2,.., одни из которых желательно обратить в максимум, другие — в минимум.

Рассмотрим пример такой задачи.

Организуется (или реорганизуется) работа промышленного предприятия. Под углом зрения какого критерия надо выбирать решение? С одной стороны, нам хотелось бы обратить в максимум валовой объем продукции V. Желательно также было бы получить максимальный чистый доход D. Что касается себестоимости S, то ее хотелось бы обратить в минимум, а производительность труда П — в максимум.

Сжатый  
  
**Введение в математическое моделирование**

Исследование операций — прикладное направление кибернетики, изучающее способы повышения эффективности организации, планирования и управления в различных системах на основе количественных методов. В настоящее время происходит переход от многовариантных расчетов к оптимизационным, имеющим существенные преимущества.Задача оптимизации включает: целевую функцию (критерий оптимизации), ограничения и граничные условия. Критерий оптимизации показывает влияние искомых переменных на величину, которую нужно минимизировать или максимизировать. Ограничения определяют связи между переменными, которые могут быть детерминированными или статистическими. Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных.Значения переменных, удовлетворяющих условиям и ограничениям, называют допустимым решением задачи. В многовариантных расчетах задаются конкретные значения искомых величин, а в оптимизационных — их граничные условия. В оптимизационных расчетах ищутся значения, удовлетворяющие всем ограничениям и придающие целевой функции оптимальное значение.

**Основные понятия**

Операция — мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению цели. Решение — определенный выбор зависящих от нас параметров. Оптимальные решения — предпочтительные перед другими по определенным признакам.Процесс поиска решения носит циклический характер, любой этап может повторяться до нахождения удовлетворительного решения. Иногда удается указать одно строго оптимальное решение, чаще — выделить область практически равноценных оптимальных решений.Параметры, образующие решение, называются элементами решения. Например, в задаче о перевозках — это числа xᵢⱼ, показывающие количество груза из пункта Aᵢ в пункт Bⱼ. Совокупность элементов решения обозначается как x.Заданные условия, которые фиксированы и нарушены быть не могут, формируют "множество возможных решений" X, где x ∈ X.Для сравнения эффективности решений используется количественный критерий — показатель эффективности W ("целевая функция"). Лучшим считается решение, максимально способствующее достижению цели. Если показатель желательно максимизировать — W → max, минимизировать — W → min.

**Математические модели**

Математическая модель — формализованное описание операции с помощью абстрактного языка, например в виде математических соотношений или схемы алгоритма. При построении модели реальное явление упрощается и описывается математическим аппаратом.Модель выбирается исходя из вида операции, ее цели и задачи исследования. Необходимо соразмерять точность модели с требуемой точностью решения и доступной информацией. Модель должна отражать важнейшие факторы, влияющие на успех операции. Характерно повторное обращение к модели для внесения коррективов после первых расчетов.Используется различный математический аппарат: от простых алгебраических уравнений до дифференциальных уравнений. В сложных случаях, когда исход зависит от множества случайных факторов, применяется метод Монте-Карло, имитирующий процесс развития операции на компьютере.В исследовании операций применяются аналитические и статистические модели. Аналитические модели учитывают меньше факторов, требуют упрощений, но лучше отражают основные закономерности и удобны для поиска оптимальных решений. Статистические — точнее, учитывают больше факторов, но громоздки, трудны для обзора и затрудняют поиск оптимальных решений. Наилучшие результаты дает их совместное применение.Имитационное моделирование применяется к процессам с вмешательством человека, принимающего решения в зависимости от обстановки. Такие процедуры известны как "деловые игры".

**Прямые и обратные задачи**

Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях примем решение x∈X? Обратные задачи: как выбрать решение x для максимизации показателя W?При малом числе вариантов можно вычислить W для каждого и выбрать оптимальный ("простой перебор").В детерминированном случае, когда условия операции полностью известны, факторы делятся на заданные условия θ и элементы решения x. Показатель эффективности зависит от обеих групп: W = W(θ, x).Постановка задачи оптимизации: при заданных условиях θ найти решение x*, максимизирующее показатель W:*W\* = max{W(θ, x)}Метод поиска экстремума выбирается исходя из особенностей функции W и ограничений. Например, при линейных зависимостях применяется линейное программирование, для многоэтапных операций — динамическое программирование.В условиях неопределенности появляется группа неизвестных факторов ξ:W = W(θ, x, ξ)Для крупномасштабных задач характерна многокритериальность — наличие нескольких показателей W₁, W₂,..., которые требуется либо максимизировать, либо минимизировать, например, объем продукции, чистый доход, себестоимость, производительность труда.